Řešení ukázkového testu (LS 2020/21) – MA2

① řešení počáteční úlohy: $y''+y = 2\cos x + x^2+1$,
$y(0)=1$, $y'(0)=0$

(i) řešení příslušné rovnice homogenní:

$y''+y=0$: ch. rovnice $\lambda^2+1=0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2}=\pm i$

$y_H(x) = c_1\cos x + c_2\sin x$, $x\in R$, $c_1,c_2\in R$

(ii) partikulární řešení rovnice „s pravou stranou" $f(x)$:

$f(x) = 2\cos x + x^2+1$, najdeme partikulární řešení odhadem k pravé straně $f_1(x) = 2\cos x$ ... označme řešení $y_{p1}(x)$ a k pravé straně $f_2(x) = x^2+1$ ... –"– $y_{p2}(x)$,

pak (díky linearitě rovnice) je $y_p(x) = y_{p1}(x)+y_{p2}(x)$ partikulární řešení pro $f(x) = f_1(x)+f_2(x)$ (v R)

a) $f_1(x) = 2\cos x \underset{(\text{odhad})}{\Longrightarrow} y_{p1}(x) = x\,(A\cos x + B\sin x)$, $A,B=?$
($\Lambda = i$ je jednonásobný kořen ch. r., tedy zde $k=1$)

$y''_{p1}(x) = \left(A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x)\right)' =$
$= -2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x)$, tedy,

dosadíme-li do rovnice $y''+y = 2\cos x$, dostaneme:

$-2A\sin x + 2B\cos x + x(\cancel{-A\cos x - B\sin x}) + x(\cancel{A\cos x + B\sin x}) = 2\cos x$

tj. (srovnání koeficientů u $\sin x$ a $\cos x$): $2B = 2 \Rightarrow B=1$
$-2A = 0 \Rightarrow A=0$

a tedy $y_{p1}(x) = x\sin x$, $x\in R$;

b) $\underline{f_2(x) = x^2+1}$ $\underset{(\text{odhad})}{\Longrightarrow}$ $\underline{y_{p_2}(x) = Ax^2+Bx+C}$

($\lambda = 0$ – není kořen ch. r., tj. $k=0$)

$y_{p_2}''(x) = (2Ax+B)' = 2A$,

tedy dostaneme (dosazením do rovnice $y''+y = x^2+1$)

$2A + Ax^2+Bx+C = x^2+1$, a srovnáním koeficientů:

u x^2: $A = 1$

u x: $B = 0$

u x^0: $2A+C = 1 \Rightarrow C = 1-2A = -1$,

tj. $\underline{y_{p_2}(x) = x^2-1 \quad , \; x \in R}$;

a $y_{ob}(x) = y_H(x) + y_p(x)$, tj. $\underline{y_{ob}(x) = C_1\cos x + C_2 \sin x + x\sin x + x^2-1}$, $\underline{C_1, C_2 \in R, \; x \in R}$

<u>Řešení počáteční úlohy</u> $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$:

$y(0)=1$: $C_1 - 1 = 1 \Rightarrow C_1 = 2$

$y'(0)=0$: $C_2 = 0$

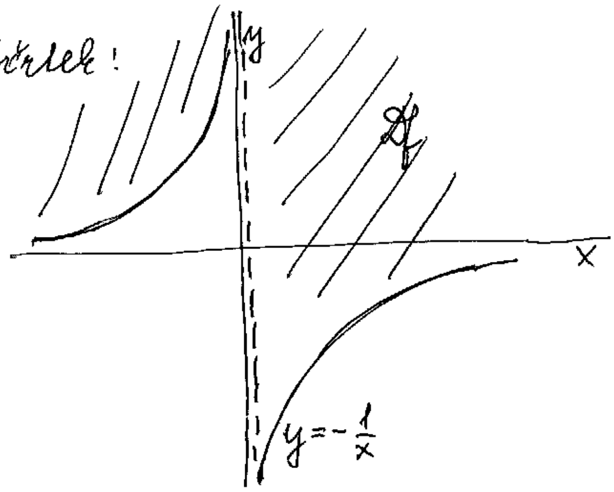
($y'(x) = -C_1\sin x + C_2 \cos x + \sin x + x\cos x + 2x$)

tedy, $\underline{y_{poč}(x) = 2\cos x + x\sin x + x^2-1 \quad , \; x \in R}$

(2) Je dána funkce $f(x,y)=\sqrt{y+\frac{1}{x}}$:

a) $D_f=\{[x,y]\in \mathbb{R}^2; x\neq 0, y+\frac{1}{x}\geq 0\} = \{[x,y]\in \mathbb{R}^2; x\neq 0 \wedge y\geq -\frac{1}{x}\}$

náčrtek!



D_f není ani uzavřená množina, neboť D_f neobsahuje část hranice – osu y, ani otevřená, neboť hraniční body $[x,-\frac{1}{x}]\in D_f$ $(x\neq 0)$.

b) $\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{1}{2\sqrt{y+\frac{1}{x}}}\left(-\frac{1}{x^2},1\right)$ v D_f^0

vnitř. D_f .. $D_f^0=\{[x,y]\in \mathbb{R}^2; x\neq 0$ a $y>-\frac{1}{x}\}$,

tj. $\nabla f(-1,2)=\frac{1}{2}(-1,1)$ $\left(=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$

d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ jsou funkce spojité v D_f^0, tedy i v bodě $(x_0,y_0)=(-1,2)$, tedy (dle postačující podmínky pro existenci totálního diferenciálu fce $f(x,y)$) je f diferencovatelná v bodě $(-1,2)$ a

$$df(-1,2)=-\frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}dy.$$

e) rovnice tečné roviny ke grafu f v bodě $(-1,2,1)$: tečná rovina existuje, neboť f je v bodě $(-1,2)$ diferencovatelná)

obecně: rovnice tečné roviny ke grafu fce f v bodě $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$:

$$z=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0),$$

$(x,y\in \mathbb{R})$

tedy pro „naši" funkci f v bodě $(-1,2,1)$ $\quad (f(-1,2)=1)$:

$$\underline{z = 1 - \tfrac{1}{2}(x+1) + \tfrac{1}{2}(y-2)}, \text{ tj. (také)}$$

$$\underline{x - y + 2z + 1 = 0}$$

normála ke grafu f v bodě grafu $(-1,2,1)$:

$$\underline{(x,y,z) = (-1,2,1) + t\,(1,-1,2)\ ,\ t \in R}$$

(normálový vektor $\vec{n}$ v bodě grafu $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ je „obecně"
$$\vec{n}(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right))$$

f) <u>lokální a globální extrémy f v $\mathcal{D}f$</u>:

(i) $\nabla f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y+\frac{1}{x}}}\left(-\frac{1}{x^2}, 1\right) \neq \vec{o}$ v $\mathcal{D}f^0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f nemá v $\mathcal{D}f^0$ lokální extrémy;

(ii) globální extrémy mohou tedy být jen na hranici $\mathcal{D}f$, tj. v množině $\mathcal{D}f \cap \partial(\mathcal{D}f) = \{[x,y] \in R^2;\ y = -\frac{1}{x}, x \neq 0\}$;

a zde dostáváme:

je-li $y = -\frac{1}{x}$, pak $f(x,-\frac{1}{x}) = 0$, $f(x,y) \geq 0$ v $\mathcal{D}f$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ f má v bodech $[x,-\frac{1}{x}]$, $x \neq 0$ neostré globální minimum $(=0)$;

f nenabývá globálního maxima, neboť „už není kde", lépe: $\lim\limits_{y\to+\infty} f(1,y) = \lim\limits_{y\to\infty}\sqrt{y+1} = +\infty$.

3 a) Objem tělesa (označme $\Omega \subset R^3$), ohraničeného rovinou $z=0$ a válcovými plochami $z = 4-y^2$ a $y = \frac{x^2}{2}$.

viz (s podrobným výkladem) – písemná přednáška z 22. 4. 2020, str. 16–17, kde je užit integrál dvojný, lze „počítat" objem i pomocí integrálu trojného:

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz = \iint_{\omega} (4-y^2)\,dx\,dy$$ (dále zmíněná přednáška),

neboť $0 \le z \le 4-y^2$, pak $\omega = \{[x,y];\ x \in \langle -2, 2 \rangle,\ \frac{x^2}{2} \le y \le 2\}$.

b) hmotnost tělesa, ohraničeného rovinou $z=0$ a plochami $x^2+y^2=1$ a $z = x^2+y^2+1$, kde hustota je $h(x,y,z) = k\cdot\sqrt{x^2+y^2}$ $(k>0)$

označme těleso zde dané Ω, pak, je-li dána hustota $h(x,y,z)$, je hmotnost dána

$$m(\Omega) = \iiint_{\Omega} h(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \,;$$

zde hustota $h(x,y,z)$ má být přímo úměrná vzdálenosti bodu $(x,y,z) \in \Omega$ od osy z, tj. $h(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2}$, $k>0$.

Tedy,

$$m(\Omega) = k \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$$

(integrál existuje, neboť funkce $h(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2}$ je fce spojitá v Ω a Ω je množina (oblast) měřitelná.

„Popis" oblasti $\Omega_{x,y,z}$: $0 \le z \le 1+x^2+y^2$ a $x^2+y^2 \le 1$,

je vidět, že bude lepší užít souřadnice „válcové":

$(x^2+y^2 = r^2,\ \sqrt{x^2+y^2} = r,\ r \ge 0)$

pak $\Omega_{r,\varphi,z}$: $0 \le z \le 1+r^2$, $0 < r \le 1$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$

a $k \iiint\limits_{\Omega_{xyz}} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\,dy\,dz = k \iiint\limits_{\Omega_{r,\varphi,z}} r \cdot r\, dr\, d\varphi\, dz \underset{\text{F.V.}}{=}$ „Jacobián"

$$= k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr \int_0^{1+r^2} dz = 2\pi k \int_0^1 (1+r^2) \cdot r^2 dr \underset{(**)}{=}$$

$$= 2\pi k \left[\frac{r^3}{3} + \frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{16}{15} \pi k \quad (k > 0)$$

(*)

Poznámka: výpočet ve zkouškové písemce můžete „ukončit" u (*) nebo už i u (**).

④ Je dáno vektorové pole $\vec{f}(x,y) = \left(\frac{y}{1+x^2y^2}, \frac{x}{1+x^2y^2} \right)$.

(i) $\vec{f}(x,y)$ je potenciální v „celé" rovině", tj. v R^2, neboť

a) R^2 je jednoduše souvislá oblast

b) $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$,

tj. jsou splněny obě podmínky postačující pro potenciálnost pole v R^2.

Výpočet: $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{1 \cdot (1+x^2y^2) - y \cdot 2x^2y}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$,

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{1 \cdot (1+x^2y^2) - x \cdot 2xy^2}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}.$$

(ii) <u>Výpočet potenciálu pole $\vec{f}$</u>:

pro potenciál $U(x,y)$ platí: $\nabla U(x,y) = \vec{f}(x,y)$ v R^2,

tj. (1) $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{1+x^2y^2}$ a (2) $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{1+x^2y^2}$, (v R^2),

tedy z (1): $U(x,y) = \int \frac{y}{1+x^2y^2}\,dx = \int \frac{y}{1+(xy)^2}\,dx =$

$= \operatorname{arctg}(xy) + c(y)$ v R^2, (3),

pak z (3): (v R^2) $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{1+(xy)^2}\,x + c'(y) \underset{(2)}{=} \frac{x}{1+x^2y^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow c'(y) = 0$, tj. $c(y) = c$ (konstanta),

<u>tedy $U(x,y) = \operatorname{arctg}(xy) + c$, $(x,y) \in R^2$, $c \in R$</u>

(iii) $\oint_{\vec{K}} \vec{f}\,d\vec{r} = \oint_{\vec{K}} \frac{y}{1+x^2y^2}\,dx + \frac{x}{1+x^2y^2}\,dy = 0$,

(kde $\vec{K}$ je kružnice o středu v $[0,0]$ a poloměru R, kladně orientovaná),

neboť v potenciálním poli je integrál libovolný tohoto pole po uzavřené křivce nulový.

(tedy integrál nemusíme „počítat", že je roven 0, víme !)

5 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\,dx$ konverguje, neboť:

(i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^3+1}$ je spojitá v $\langle 0,+\infty)$;

(ii) $0 \leq \dfrac{\sqrt{x}}{x^3+1} \leq \dfrac{1}{x^2\cdot\sqrt{x}}$

(iii) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2\sqrt{x}}\,dx$ konverguje $\left(\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx \text{ konverguje} \Leftrightarrow p>1 \right)$

Z (i)(ii)(iii) plyne (užitím srovnávacího kriteria):

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2\sqrt{x}}\,dx \text{ konverguje} \Rightarrow \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\,dx \text{ konverguje} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\,dx \text{ konverguje}$$ (plyne z definice $\int_0^\infty f(x)dx$ a vlastnosti (i) zde)

nebo

5 (z LA): $L: R^3 \to R^3$ je lineární zobrazení, pro které je

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix};$$

pak, jak jsme odvodili na přednášce, je pro $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$:

b)
$$L\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 2 & 1\\-2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

c) Je-li $L: R^3 \to R^3$ prosté, pak inverzní zobrazení je definováno:

$$L(x) = y \Leftrightarrow x = L^{-1}(y),\quad x, y \in R^3$$

(je-li L zobrazení prosté, je i na R^3)

Je-li $L: R^3 \to R^3$ lineární a prosté, pak $L(x) = Ax$, kde matice A je regulární čtvercová matice, a pak $\underline{L^{-1}(y) = A^{-1}\cdot y}$ (neboť $A\cdot x = y \iff x = A^{-1}y$, když A je regulární, A^{-1} inverzní matice k matici A)

zde $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, zkouška $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

tj. $\underline{L^{-1}(y) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in R^3}$.

<u>nebo</u>

5 <u>Je dána rovnice $z^4 - x^3yz^2 - xz + y^3 = 0$ (*):</u>

b) máme ukázat, že rovnicí (*) je v okolí bodu $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$ definována implicitní funkce $z = z(x,y)$:

Užijeme větu o implicitní funkci (dvou proměnných) – ověříme předpoklady věty – označme $F(x,y) = z^4 - x^3yz^2 - xz + y^3$:

(i) $F(x,y,z) \in C^\infty(R^3)$

(ii) $F(1,1,1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$

(iii) $\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1) = 4z^3 - 2x^3yz - x \Big|_{(1,1,1)} = 4 - 2 - 1 = 1 \neq 0$

Tedy, dle věty, rovnicí $F(x,y,z) = 0$ je v okolí bodu $(1,1,1)$ definována implicitní funkce $z = z(x,y)$, $z(1,1) = 1$, a která splňuje rovnici

$$(**) \quad \underline{z^4(x,y) - x^3y\, z^2(x,y) - x\, z(x,y) + y^3 = 0 \quad \text{v } \mathcal{U}(1,1)}$$

c) $z(x,y) \cong z(1,1) + \frac{\partial z}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial z}{\partial y}(1,1)(y-1)$ v $U(1,1)$,

tj. $z(x,y) \cong 1 + 4(x-1) - 2(y-1)$ v $U(1,1)$ a

$z(1{,}01;\ 0{,}96) \cong 1 + 4\cdot 0{,}01 - 2(-0{,}04) = 1 + 0{,}04 + 0{,}08 =$
$= 1{,}12$

výpočet $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ a $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$:

$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$: (derivujeme rovnici (**) dle x)

$$4z^3(x,y)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - 3x^2y\,z^2(x,y) - 2x^3y\frac{\partial z}{\partial x}\cdot z(x,y) - z(x,y) - x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

(***) $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\left(4z^3(x,y) - 2x^3y\,z(x,y) - x\right) = 3x^2y\,z^2(x,y) + z(x,y)$

v $(1,1)$: $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)\cdot 1 = 4$

$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$: (derivujeme rovnici (**) dle y)

$$4z^3(x,y)\cdot\frac{\partial z}{\partial y} - x^3z^2(x,y) - 2x^3y\,z\cdot\frac{\partial z}{\partial y} - x\frac{\partial z}{\partial y} + 3y^2 = 0$$

(****) $\frac{\partial z}{\partial y}\left(4z^3(x,y) - 2x^3y\,z(x,y) - x\right) = x^3z^2(x,y) - 3y^2$

v $(1,1)$: $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)\cdot 1 = -2$

d) a smíšenou druhou derivaci $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(1,1) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}(1,1)$
(derivace druhého řádu fce $z(x,y)$ jsou spojité v $(1,1)$, tedy záměnné) spočítáme derivováním rovnice (***) dle y nebo rovnice (****) dle x :

$\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|$ (***) : (pro jednoduchost zde označuji funkci $z(x,y)$ jenom „z", stejně tak i $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\left(4z^3-2x^3yz-x\right)+\frac{\partial z}{\partial x}\left(12z^2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-2x^3z-2x^3y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)=$$
$$=3x^2z^2+6x^2yz\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}$$

a v bodě (1,1): $\left(\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)=4,\ \frac{\partial z}{\partial y}(1,1)=-2\right)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)\cdot 1+4\cdot(-24-2+4)=3-12-2\,,\ \text{tj.}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)=-11+88\,,$$
$$\text{tj.}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)=77$$

nebo $\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|$ (****) dostaneme:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\left(4z^3-2x^3yz-x\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(12z^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-6x^2yz-2x^3y\frac{\partial z}{\partial x}-1\right)=$$
$$=3x^2z^2+2x^3z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\,,$$

a v bodě (1,1): $\left(\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)=4,\ \frac{\partial z}{\partial y}(1,1)=-2\right)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(1,1)\cdot 1-2\left(48-6-8-1\right)=3+8\,,\ \text{tj.}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(1,1)=11+66\,,\ \text{tj.}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(1,1)=77\ \left(=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)\right)$$

(což jsme věděli hned na „začátku" d))